数理解析研究所講究録 1236 巻 2001 年 115-121

円による射影空間の空間形への平行埋蔵の特徴付け

水津　薫 (Kaoru Suizu)

島根大学大学院総合理工学研究科
(Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane Univ.)

0　はじめに.

三種類の射影空間（実射影空間，複素射影空間又は四元数射影空間）から実空間形への平行埋蔵は、planar geodesic 部分多様体の例として良く知られている。これらの射影空間上の各測地線は、平行埋蔵を通して、実空間形内の平面曲線になっている。実はこれらの平面曲線は、全て実空間形内の円になっていることが知られている。その意味で、これらの平行埋蔵を、部分多様体上の測地線の ambient space での形により互いに識別することは出来ない。

これに対し、部分多様体上の正の曲率をもつ円の、平行埋蔵を通しての ambient space での形を考えてみる。実射影空間上の正の曲率をもつ任意の円は、平行埋蔵を通して平面曲線にはならない。これに反して、複素射影空間、四元数射影空間上のある特別な円は円に写される。よって平面曲線になっている。

この観点から、複素射影空間、又は四元数射影空間の実空間形への平行埋蔵を、部分多様体上の特別な円で特徴付けた定理を本稿で報告する [Su] 。この定理は、Adachi,Maeda,Ogiue の定理 [AMO] の改良である。

尚、本稿での問題意識は、Kôzaki, Maeda [KM] により動機付けられたものである。

1　Riemann 多様体上の円.

まず、Riemann 多様体上の円の定義を復習しよう。M を Riemann 多様体とし ∇ を M における Riemann 接続とする。M における s を弧長とする正則曲線 $\gamma=\gamma(s)$ が、各点 $\gamma(s)$ において γ の接ベクトル X_s と $\nabla_s := \nabla_{\dot\gamma(s)}$ に対

し、γ に沿ったベクトル場 Y_s と定数 $k \geq 0$ が存在して

$$\begin{cases} \nabla_s X_s = kY_s \\ \nabla_s Y_s = -kX_s, \end{cases} \tag{1}$$

を満たすとき、γ を曲率 k の**円** (circle) と呼ぶ。曲率 0 の円は測地線に他ならない。任意の $x \in M$ において、任意の正規直交系 $X, Y \in T_xM$ と任意定数 $k > 0$ に対し、初期条件:

$$\gamma(0) = x, \quad X_0 = X, \quad (\nabla_s X_s)_{s=0} = kY$$

を満たす円 $\gamma(s)$ が局所的に唯一つ存在する [NY]。

曲率 $k(> 0)$ の円は、閉曲線になるとは限らない。例えば、上半平面 $H^2(c)$ に対し Poincaré 計量を与えると、$H^2(c)$ は2次元双曲型空間になる。このとき $H^2(c)$ 上の測地線は開曲線になることが良く知られているが、γ を $H^2(c)$ 上の曲率 $k(\geq 0)$ の円とすると、$\gamma(s)$ が閉曲線になる為の必要十分条件は $k > \sqrt{|c|}$ であることが分かっている [C]。

次に Riemann 多様体 M 上の滑らかな Frenet 曲線における Frenet の公式について復習する。$\gamma = \gamma(s)$ を M 上の s を弧長とする滑らかな曲線としたとき、γ に沿った正規直交標構 $\{V_1 = \dot{\gamma}, \cdots, V_d\}$, $d \leq n$ と正可微分関数 $\kappa_1(s), \cdots, \kappa_{d-1}(s)$ が存在して

$$\nabla_s V_j(s) = -\kappa_{j-1}(s)V_{j-1}(s) + \kappa_j(s)V_{j+1}(s), \quad j = 1, \cdots, d \tag{2}$$
$$\text{where} \quad V_0 \equiv V_{d+1} \equiv 0$$

を満たすとき、$\gamma = \gamma(s)$ を**proper order (真性次数) d の Frenet 曲線**という。方程式(2) を Frenet 曲線 γ の Frenet 公式、関数 $\kappa_1(s), \cdots, \kappa_{d-1}(s)$ を γ の曲率、正規直交標構 $\{V_1, \cdots, V_d\}$ を γ の Frenet 標構と呼ぶ。

proper order $r(\leq d)$ の Frenet 曲線を order (次数) d の Frenet 曲線と呼ぶ。proper order $r(\leq d)$ の Frenet 曲線に対して条件 (2) を $\kappa_j \equiv 0$ $(r \leq j \leq d-1)$, $V_j \equiv 0$ $(r+1 \leq j \leq d)$ として使う。滑らかな Frenet 曲線に対し全ての曲率がそれぞれ定数となるとき**螺旋**(helix) と呼ぶ。次数 1 の螺旋は測地線である。次数 2 の螺旋は (1) を満たし、曲率 k の円となる。つまり、次数 2 の Frenet 曲線の特別な場合として測地線や円がある。

本稿において曲線とは滑らかな Frenet 曲線を意味する。

2 Planar geodesic immersions.

M を $\widetilde{M}$ の Riemann 部分多様体とし、f をその等長埋入とする。M 上の任意の測地線が、局所的に $\widetilde{M}$ の 2 次元全測地的部分多様体に含まれるとき、f

をplanar geodesic immersion と呼ぶ。

$\widetilde{M}^m(\tilde{c})$ を曲率 $\tilde{c}$ の m 次元完備単連結実空間形とする。良く知られているように任意の実空間形は、曲率が正、負、零に対応して、球面、実双曲型空間、ユークリッド空間と局所的に等長同型である。

ここで実空間形の全ての planar geodesic 部分多様体の分類定理を紹介する。

定理 A.([Sa]) M^n を実空間形 $\widetilde{M}^m(\tilde{c})$ の Riemann 部分多様体とし、f をその等長埋入とする。ここで f を planar geodesic immersion と仮定すると、(M^n, f) は $\widetilde{M}^m(\tilde{c})$ の全臍的部分多様体になるか、又は、局所的に $\widetilde{M}^m(\tilde{c})$ へ平行埋入された compact rank one の対称空間と合同である。

3 $\mathbb{R}P^n$ 上の円の像.

γ を実射影空間 $\mathbb{R}P^n(c)$ 上の円とする。このとき、$\mathbb{R}P^n$ から実空間形への平行埋入 f を通しての γ の像 $f \circ \gamma$ を考えてみよう。ここで $\mathbb{R}P^n$ 上の全ての円は、局所的に $\mathbb{R}P^n$ のある全測地的部分多様体 $\mathbb{R}P^2$ 上に乗っていることに注意する。これにより、$n=2$ のときを考えれば十分である。定理 A より $\mathbb{R}P^n(c)$ 上の各測地線の平行埋入を通しての像は、平面曲線になる。これは実空間形内の、同じ曲率を持つ円になっていることが知られている [Sa]。$\mathbb{R}P^n(c)$ 上の正の曲率を持つ円の実空間形内における像について、以下の結果を得た：

命題 1.([Su]) $f = f_2 \circ f_1 : \mathbb{R}P^2(\frac{c}{3}) \overset{f_1}{\hookrightarrow} S^4(c) \overset{f_2}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^{2+p}(\tilde{c})$ $(c \geq \tilde{c})$ を $\mathbb{R}P^2(\frac{c}{3})$ から $\widetilde{M}^{2+p}(\tilde{c})$ への平行埋蔵とする。ここで f_1 は $\mathbb{R}P^2(\frac{c}{3})$ から $S^4(c)$ への第一標準極小埋蔵であり、f_2 は $S^4(c)$ から $\widetilde{M}^{2+p}(\tilde{c})$ への全臍的埋蔵である。このとき、$\mathbb{R}P^2(\frac{c}{3})$ 上の曲率 $k(>0)$ の円 γ に対して、曲線 $f \circ \gamma$ は次のようになる。

(I) $c = \tilde{c}$ のとき、

(i) f は曲率 $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{6}}$ の全ての円を、曲率 $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}, \sqrt{c}$ の proper order 3 の螺旋に写す。

(ii) f は正の曲率 $k \neq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{6}}$ の全ての円を、曲率 $\frac{\sqrt{3k^2+c}}{\sqrt{3}}, \frac{3k\sqrt{c}}{\sqrt{3k^2+c}}, \frac{|6k^2-c|}{\sqrt{3(3k^2+c)}}$ の proper order 4 の螺旋に写す。

(II) $c > \tilde{c}$ のとき、

f は曲率 k の全ての円を曲率 $\frac{\sqrt{3k^2+4c-3\tilde{c}}}{\sqrt{3}}, \frac{3k\sqrt{c}}{\sqrt{3k^2+4c-3\tilde{c}}}, \frac{\sqrt{4(3k^2+c)^2-3\tilde{c}(12k^2+c)}}{\sqrt{3(3k^2+4c-3\tilde{c})}}$ の proper order 4 の螺旋に写す。

4 Kähler 円と四元数円

ここで、Kähler 多様体と四元数 Kähler 多様体上における、ある特別な円の定義を復習する。

γ を Kähler 多様体 M 上の円とする。J を M の複素構造とすると、(1) より $\langle X_s, JY_s \rangle$ は γ に沿って一定である。$\tau := \langle X_s, JY_s \rangle$ とおき、τ を円 γ の**複素振率** (complex torsion) と呼ぶ。ここで Schwartz の不等式より $|\tau| \leq 1$ となる。

γ と Y により張られる holomorphic plane に対し

$$Y_s = JX_s \quad \text{or} \quad Y_s = -JX_s$$

を満たす円 γ を Kaehler 多様体 M 上の**Kähler 円** (Kähler circle) と呼ぶ。γ が Kähler 円 ならば (1) は

$$\nabla_s X_s = kJX_s \quad \text{or} \quad \nabla_s X_s = -kJX_s$$

となる。

複素射影空間から実空間形への平行埋蔵を通しての Kähler 円の像は、次のようになる [AMO]:

命題 2. $f = f_2 \circ f_1 : \mathbb{C}P^n(\frac{2n}{n+1}c) \overset{f_1}{\hookrightarrow} S^{n(n+2)-1}(c) \overset{f_2}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^{2n+p}(\tilde{c})$ $(c \geq \tilde{c})$ を $\mathbb{C}P^n(\frac{2n}{n+1}c)$ から $\widetilde{M}^{2n+p}(\tilde{c})$ への平行埋蔵とする。ここで f_1 は $\mathbb{C}P^n(\frac{2n}{n+1}c)$ から $S^{n(n+2)-1}(c)$ への第一標準極小埋蔵であり、f_2 は $S^{n(n+2)-1}(c)$ から $\widetilde{M}^{2n+p}(\tilde{c})$ への全臍的埋蔵である。このとき、f は $\mathbb{C}P^n(\frac{2n}{n+1}c)$ 上の全ての Kähler 円を $\widetilde{M}^{2n+p}(\tilde{c})$ 内の曲率正の**円**に写す。(よって、特に曲線 $f \circ \gamma$ は $\widetilde{M}^{2n+p}(\tilde{c})$ 内の**平面曲線**になっている。)

命題 2 の逆を考えることにより、上記の平行埋蔵 f の特徴付けが得られている。

定理 B.([AMO]) 非平坦実 $2n$ (≥ 4) 次元 Kähler 多様体 (M, J) において、次のような等長埋入を考える:
$f : M \overset{\text{等長埋入}}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^N(\tilde{c})$ $(= \mathbb{E}^N, S^N(\tilde{c})$ 又は $H^N(\tilde{c})$ $)$ s.t. M 上のある曲率 k (> 0) をもつ全ての Kähler 円が $\widetilde{M}^N(\tilde{c})$ 内の**円**になる。
$\Longrightarrow$ 局所的に $M = \mathbb{C}P^n(\frac{2n}{n+1}c)$ であり、更に $\widetilde{M}^N(\tilde{c})$ への等長埋入 f は平行になる。よって f は次のように分解される：

$$\mathbb{C}P^n\left(\tfrac{2n}{n+1}c\right) \overset{minimal}{\hookrightarrow} S^{n(n+2)-1}(c) \overset{totally\ umbilic}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^N(\tilde{c}) \qquad (\ c \geq \tilde{c}\ )$$

M を四元数 Kaehler 多様体とし、$\{I, J, K\}$ を M 上の四元数構造の局所基とする。$\gamma = \gamma(s)$ を s を弧長とする M 上の円とする。このとき I, J, K はある γ に沿った関数 p, q, r に対して

$$\begin{cases} \nabla_s I &= \qquad\quad qJ \;\; - rK \\ \nabla_s J &= -qI \qquad\qquad + pK \\ \nabla_s K &= \;\; rI \;\; - pJ \end{cases} \tag{3}$$

を満たす。(1)、(3) より $\langle Y, IX_s\rangle^2 + \langle Y, JX_s\rangle^2 + \langle Y, KX_s\rangle^2$ は γ に沿って一定である [A]。ここで IY_s, JY_S, KY_s は互いに直交し長さ 1 より $0 \leq \langle Y, JX_s\rangle^2 + \langle Y, KX_s\rangle^2 \leq 1$ となる。Y_s が γ の各点において IX_s, JX_s, KX_s の一次結合で表せるとき、即ち

$$\langle Y, IX_s\rangle^2 + \langle Y, JX_s\rangle^2 + \langle Y, KX_s\rangle^2 = 1$$

となるとき、円 γ を四元数 Kaehler 多様体上の**四元数円** (quaternionic circle) と呼ぶ。

四元数射影空間から実空間形への平行埋蔵を通しての四元数円の像は、次のようになる [AMO]:

命題 3. $g = g_2 \circ g_1 : \mathbb{Q}P^n(\frac{2n}{n+1}c) \overset{g_1}{\hookrightarrow} S^{n(2n+3)-1}(c) \overset{g_2}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^{4n+p}(\tilde{c}) \quad (c \geq \tilde{c})$ を $\mathbb{Q}P^n(\frac{2n}{n+1}c)$ から $\widetilde{M}^{4n+p}(\tilde{c})$ への平行埋蔵とする。ここで g_1 は $\mathbb{Q}P^n(\frac{2n}{n+1}c)$ から $S^{n(2n+3)-1}(c)$ への第一標準極小埋蔵であり、g_2 は $S^{n(2n+3)-1}(c)$ から $\widetilde{M}^{4n+p}(\tilde{c})$ への全臍的埋蔵である。このとき、g は $\mathbb{Q}P^n(\frac{2n}{n+1}c)$ 上の全ての四元数円を $\widetilde{M}^{4n+p}(\tilde{c})$ 内の曲率正の**円**に写す。(よって、特に曲線 $g \circ \gamma$ は $\widetilde{M}^{4n+p}(\tilde{c})$ 内の**平面曲線**になっている。)

命題 3 の逆を考えることにより、上記の平行埋蔵 g の特徴付けが得られている。

定理 C.([AMO]) 非平坦実 $4n$ (≥ 8) 次元四元数 Kähler 多様体 $(M, \{I, J, K\})$ において、次のような等長埋入を考える:
$g : M \overset{\text{等長埋入}}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^N(\tilde{c})$ s.t. M 上のある曲率 k (> 0) をもつ全ての四元数円が $\widetilde{M}^N(\tilde{c})$ 内の**円**になる。
$\Longrightarrow$ 局所的に $M = \mathbb{Q}P^n(\frac{2n}{n+1}c)$ であり、更に $\widetilde{M}^N(\tilde{c})$ への等長埋入 g は平行になる。よって g は次のように分解される:

$$\mathbb{Q}P^n\left(\tfrac{2n}{n+1}c\right) \overset{minimal}{\hookrightarrow} S^{n(2n+3)-1}(c) \overset{totally\ umbilic}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^N(\tilde{c}) \qquad (\, c \geq \tilde{c})$$

5 $\mathbb{C}P^n$ 又は $\mathbb{Q}P^n$ の平行埋蔵の特徴付け

命題 2 の逆を考えることにより、実空間形への平行埋蔵に、次のような特徴付けを与えることができる。これは定理 B の改良である。

定理 1. 非平坦実 $2n$ (≥ 4) 次元 Kähler 多様体 (M, J) において、次のような等長埋入を考える:
$f : M \overset{\text{等長埋入}}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^N(\tilde{c})$ ($= \mathbb{E}^N, S^N(\tilde{c})$ 又は $H^N(\tilde{c})$) s.t. M 上のある曲率 k (> 0) をもつ全ての Kähler 円が $\widetilde{M}^N(\tilde{c})$ 内の**平面曲線**になる。
$\Longrightarrow$ 局所的に $M = \mathbb{C}P^n(\frac{2n}{n+1}c)$ であり、更に $\widetilde{M}^N(\tilde{c})$ への等長埋入 f は平行になる。よって f は次のように分解される:

$$\mathbb{C}P^n\left(\tfrac{2n}{n+1}c\right) \overset{minimal}{\hookrightarrow} S^{n(n+2)-1}(c) \overset{totally\ umbilic}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^N(\tilde{c}) \qquad (\ c \geq \tilde{c}\ )$$

四元数 Kähler 多様体に対しても、次のような定理 1 と同様の結果が得られる。これは定理 C の改良である。

定理 2. 非平坦実 $4n$ (≥ 8) 次元四元数 Kähler 多様体 $(M, \{I, J, K\})$ において、次のような等長埋入を考える:
$g : M \overset{\text{等長埋入}}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^N(\tilde{c})$ s.t. M 上のある曲率 k (> 0) をもつ全ての四元数円が $\widetilde{M}^N(\tilde{c})$ 内の**平面曲線**になる。
$\Longrightarrow$ 局所的に $M = \mathbb{Q}P^n(\frac{2n}{n+1}c)$ であり、更に $\widetilde{M}^N(\tilde{c})$ への等長埋入 g は平行になる。よって g は次のように分解される:

$$\mathbb{Q}P^n\left(\tfrac{2n}{n+1}c\right) \overset{minimal}{\hookrightarrow} S^{n(2n+3)-1}(c) \overset{totally\ umbilic}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^N(\tilde{c}) \qquad (\ c \geq \tilde{c})$$

参考文献

[A] T. Adachi, *Circles on quaternionic space forms*, J. Math. Soc. Japan 48(1996), 205-227.

[AMO] T. Adachi, S. Maeda and K. Ogiue, *Extrinsic shape of circles and standard imbeddings of projective spaces,* Manuscripta Math. 93(1997), 267-272.

[C] A. Comtet, *On the Landau levels on the hyperbolic plane,* Ann. of physis 173(1987), 185-209.

[KM] M. Kôzaki and S. Maeda, *A characterization of extrinsic spheres in a Riemannian manifold*, to appear in Tsukuba J. Math..

[NY] K. Nomizu and K. Yano, *On circles and spheres in Riemannian geometry,* Math. Ann. 210(1974), 163-170.

[Sa] K. Sakamoto, *Planar geodesic immersions*, Tôhoku Math. J. 29(1977), 25-56.

[Su] K. Suizu, *Characterizations of parallel imbeddings of projective spaces into space forms by circles*, to appear in Math. Japonicae.